2021/11/13

An attempt at a standard specification for an online Mathematics test

Tetsuya Taniguchi

Nihon University

This talk is based on the following paper:
Computer & education 2020 Vol. 48 p. 47-52

Standardization of Authoring Contents for Mathematics Online Testing and Practicality Testing

Tetsuya Taniguchi, Mitsuru Kawazoe, Kentaro Yoshitomi, Yasuyuki Nakamura, Tetsuo Fukui, Shizuka Shirai, Katsuya Kato,
Takahiro Nakahara

An attempt at a standard specification for an online Mathematics test

1. **Background**
2. **Problems Faced**
3. **Solutions**
4. **Results**

BACKGROUND

表1 主な数学eラーニング

	CAS	特徴
STACK	Maxima	柔軟なフィードバック
Math on Web	Mathematica	柔軟な評価アルゴリズム
Möbius Assessment	Maple	柔軟な解答方式

異種システム間での問題の相互利用を行いたい。

A example of STACK

小テストナビゲーション

1 2 3 4

テスト終了 ...

新しいプレビューを開始する

ナビゲーション

Home

問題 1

未解答

最大評点 1.00

問題にフラグ付けする

問題を編集する

つぎの 2 階線形微分方程式を解きなさい。

$\ddot{x} - 9\dot{x} + 18x = 0$

解答欄:

選択肢: ① $x = C_1 \cos 6t + C_2 \sin 3t$ ② $x = e^{9t}\left(C_1 + C_2 t\right)$ ③ $x = e^{18t}\left(C_1 + C_2 t\right)$

④ $x = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{-6t}$ ⑤ $x = C_1 \cos 3t + C_2 \sin 6t$ ⑥ $x = C_1 e^{3t} + C_2 e^{6t}$

⑦ $x = C_1 \cos(-3t) + C_2 \sin(-6t)$ ⑧ $x = e^{-9t}\left(C_1 + C_2 t\right)$

ただし, C_1, C_2 は任意定数とする.

問題 2

未解答

最大評点 1.00

問題にフラグ付けする

問題を編集する

つぎの 2 階線形微分方程式を解きなさい。

$\ddot{x} - 16\dot{x} + 64x = 0$

解答欄:

選択肢: ① $x = C_1 \cos 16t + C_2 \sin 8t$ ② $x = e^{16t}\left(C_1 + C_2 t\right)$ ③ $x = e^{8t}\left(C_1 + C_2 t\right)$

④ $x = C_1 \cos 8t + C_2 \sin 16t$ ⑤ $x = C_1 e^{-8t} + C_2 e^{-16t}$ ⑥ $x = e^{-8t}\left(C_1 + C_2 t\right)$

⑦ $x = C_1 \cos(-8t) + C_2 \sin(-16t)$ ⑧ $x = C_1 e^{8t} + C_2 e^{16t}$

ただし, C_1, C_2 は任意定数とする.

問題 3

未解答

最大評点 1.00

問題にフラグ付けする

問題を編集する

つぎの 2 階線形微分方程式を解きなさい。 小問 | 問

$\ddot{x} - 6\dot{x} + 58x = 0$

解答欄:

選択肢: ① $x = e^{-10t}\left(C_1 + C_2 t\right)$ ② $x = e^{3t}\left(C_1 \cos 7t + C_2 \sin 7t\right)$ ③ $x = e^{10t}\left(C_1 + C_2 t\right)$

④ $x = C_1 \cos 7t + C_2 \sin 3t$ ⑤ $x = e^{21t}\left(C_1 + C_2 t\right)$ ⑥ $x = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{-7t}$

⑦ $x = C_1 e^{3t} + C_2 e^{7t}$ ⑧ $x = C_1 \cos 3t + C_2 \sin 7t$

ただし, C_1, C_2 は任意定数とする.

問題 4

未解答

最大評点 1.00

問題にフラグ付けする

問題を編集する

つぎの 2 階線形微分方程式を解きなさい. 小問 | 問題のテ

$\ddot{x} - 12\dot{x} + 32x = e^{3t}$

解答欄:

選択肢: ① $x = e^{32t}\left(C_1 + C_2 t\right) + \frac{1}{5} e^{3t}$ ② $x = C_1 \cos(-4t) + C_2 \sin(-8t) - \frac{1}{6} e^{3t}$

③ $x = e^{-12t}\left(C_1 + C_2 t\right) - \frac{1}{5} e^{3t}$ ④ $x = C_1 e^{4t} + C_2 e^{8t} + \frac{1}{5} e^{3t}$

⑤ $x = C_1 \cos 8t + C_2 \sin 4t - \frac{1}{5} e^{3t}$ ⑥ $x = C_1 \cos 4t + C_2 \sin 8t - \frac{1}{6} e^{3t}$

⑦ $x = C_1 e^{4t} + C_2 e^{8t} + \frac{1}{6} e^{3t}$ ⑧ $x = C_1 e^{-4t} + C_2 e^{-8t} + \frac{1}{5} e^{3t}$ ⑨ $x = e^{12t}\left(C_1 + C_2 t\right) + \frac{1}{5} e^{3t}$

ただし, C_1, C_2 は任意定数とする.

問題 1

不正解

0.00 / 1.00

問題にフラグ付けする

問題を編集する

小問 | 問題のテストを実行します

つぎの 2 階線形微分方程式を解きなさい。

$\ddot{x} - 9\dot{x} + 18x = 0$

解答欄: 3

あなたの入力した数式は次のとおりです：

$$3$$

選択肢: ① $x = C_1 \cos 6t + C_2 \sin 3t$ ② $x = e^{9t}\left(C_1 + C_2 t\right)$ ③ $x = e^{18t}\left(C_1 + C_2 t\right)$

④ $x = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{-6t}$ ⑤ $x = C_1 \cos 3t + C_2 \sin 6t$ ⑥ $x = C_1 e^{3t} + C_2 e^{6t}$

⑦ $x = C_1 \cos(-3t) + C_2 \sin(-6t)$ ⑧ $x = e^{-9t}\left(C_1 + C_2 t\right)$

ただし, C_1, C_2 は任意定数とする.

不正解です。もう1度やり直しましょう。

特性方程式 $P(\lambda) = \lambda^2 - 9\lambda + 18 = 0$ の解は

$\lambda = 3, 6$ となる. よって,

与えられた微分方程式は

$(D-3)(D-6)x = 0$

となり, 微分方程式の解は次のようになる.

$x = C_1 e^{3t} + C_2 e^{6t}$

(C_1, C_2は任意定数) ♣

Feedback!

問題 2

正解

1.00 / 1.00

問題にフラグ付けする

問題を編集する

小問 | 問題のテストを実行します

つぎの 2 階線形微分方程式を解きなさい。

$$\ddot{x} - 16\dot{x} + 64x = 0$$

解答欄: 3

あなたの入力した数式は次のとおりです :

$$3$$

選択肢: ① $x = C_1 \cos 16t + C_2 \sin 8t$　② $x = e^{16t}\left(C_1 + C_2 t\right)$　③ $x = e^{8t}\left(C_1 + C_2 t\right)$

④ $x = C_1 \cos 8t + C_2 \sin 16t$　⑤ $x = C_1 e^{-8t} + C_2 e^{-16t}$　⑥ $x = e^{-8t}\left(C_1 + C_2 t\right)$

⑦ $x = C_1 \cos(-8t) + C_2 \sin(-16t)$　⑧ $x = C_1 e^{8t} + C_2 e^{16t}$

ただし, C_1, C_2 は任意定数とする.

Feedback!

良くできました。正解です。

特性多項式 $P(\lambda) = \lambda^2 - 16\lambda + 64 = 0$ は $P(\lambda) = (\lambda - 8)^2$ と因数分解される. よって,

与えられた微分方程式は

$$(D - 8)^2 x = 0$$

となり, 微分方程式の解は次のようになる.

$$x = e^{8t}(C_1 + C_2 t)$$

(C_1, C_2は任意定数)　♣

問題 3

正解

1.00 / 1.00

問題にフラグ付けする

問題を編集する

小問 | 問題

つぎの 2 階線形微分方程式を解きなさい。

$\ddot{x} - 6\dot{x} + 58x = 0$

解答欄: 2

あなたの入力した数式は次のとおりです :

$$2$$

選択肢: ① $x = e^{-10t}\left(C_1 + C_2 t\right)$ ② $x = e^{3t}\left(C_1 \cos 7t + C_2 \sin 7t\right)$ ③ $x = e^{10t}\left(C_1 + C_2 t\right)$
④ $x = C_1 \cos 7t + C_2 \sin 3t$ ⑤ $x = e^{21t}\left(C_1 + C_2 t\right)$ ⑥ $x = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{-7t}$
⑦ $x = C_1 e^{3t} + C_2 e^{7t}$ ⑧ $x = C_1 \cos 3t + C_2 \sin 7t$

ただし, C_1, C_2 は任意定数とする.

良くできました。正解です。

特性方程式 $P(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 58 = 0$ の解は

$\lambda = 3 \pm 7i$ となる. よって,

与えられた微分方程式は

$\{D - (3+7i)\}\{D - (3-7i)\}x = 0$

となり, 微分方程式の解は次のようになる.

$x = e^{3t}(C_1 \cos 7t + C_2 \sin 7t)$

(C_1, C_2は任意定数) ♣

Feedback!

問題 4

正解

1.00 / 1.00

問題にフラグ付けする

問題を編集する

小問 | 問題のテストを実行し

つぎの 2 階線形微分方程式を解きなさい．

$\ddot{x} - 12\dot{x} + 32x = e^{3t}$

解答欄: 4

あなたの入力した数式は次のとおりです：

$$4$$

選択肢: ① $x = e^{32t}\left(C_1 + C_2 t\right) + \frac{1}{5}e^{3t}$ ② $x = C_1\cos(-4t) + C_2\sin(-8t) - \frac{1}{6}e^{3t}$

③ $x = e^{-12t}\left(C_1 + C_2 t\right) - \frac{1}{5}e^{3t}$ ④ $x = C_1e^{4t} + C_2e^{8t} + \frac{1}{5}e^{3t}$

⑤ $x = C_1\cos 8t + C_2\sin 4t - \frac{1}{5}e^{3t}$ ⑥ $x = C_1\cos 4t + C_2\sin 8t - \frac{1}{6}e^{3t}$

⑦ $x = C_1e^{4t} + C_2e^{8t} + \frac{1}{6}e^{3t}$ ⑧ $x = C_1e^{-4t} + C_2e^{-8t} + \frac{1}{5}e^{3t}$ ⑨ $x = e^{12t}\left(C_1 + C_2 t\right) + \frac{1}{5}e^{3t}$

ただし，C_1, C_2 は任意定数とする．

良くできました。

特性方程式 $P(\lambda) = \lambda^2 - 12\lambda + 32 = 0$ の解は $\lambda = 4, 8$ となる．よって，

与えられた微分方程式は

$(D-4)(D-8)x = e^{3t}$ となる．

$(D-4)(D-8)u = 0$ の一般解 u は，

$u = C_1e^{4t} + C_2e^{8t}$ となる．また，

特殊解 $x_0 = \dfrac{1}{(D-4)(D-8)}e^{3t}$ は，

$x_0 \overset{\text{公式6}}{=} \dfrac{1}{(3-4)(3-8)}e^{3t} = \frac{1}{5}e^{3t}$

よって，求めたい一般解は $x = u + x_0$ より，

$x = C_1e^{4t} + C_2e^{8t} + \frac{1}{5}e^{3t}$

(C_1, C_2は任意定数) ♣

Feedback!

PROBLEMS FACED

　それぞれ利用している数式処理システム（Computer Algebra System，CAS）が異なり問題の実装方法も異なっている。したがって，同類の問題であってもそれぞれの実装方法に従って問題データを作成する必要があり，困難である。

重要な教育資源としての問題データが互換性のないまま分散している状況にあると言わざるを得ない。

SOLUTIONS

吉冨によるSTACKとMATH ON WEBの問題データ構造精査という先駆的な研究により，数学eラーニングシステムの問題データの共通性が明らかになり，異種システム間での相互問題データ共有を実現するためには，標準仕様を設定し，それに基づいた問題設計をすることが重要であるという知見を得た。

その知見を踏まえて，我々は数学オンラインテスト問題の標準仕様（Mathematics e-Learning Question Specification， MeLQS）を提案した。提案仕様は<u>問題仕様</u>と<u>実装仕様</u>の二段階で構成されている。

SOLUTIONS

問題仕様書作成例

自然数 n に対して,

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x}\, dx$$

を計算させたい。ただし, n はあまり大きくならないようにしたい。

SOLUTIONS

問題仕様書作成例

MeLQS Concept Design Data File.

▷分類

教科：大学数学	コース：微積分学

▷単元

広義積分

▷問題名

ガンマ関数の計算問題

▷出題意図

ガンマ関数の簡単な計算の練習

▷問題文

Γ(6) の値を求めよ.

▷正答例

120

▷フィードバック

No	チェック内容	フィードバック	採点 (%)	備考
1	120	よくできました.	100	
2	120 以外	違います.	0	

▷備考

Γ(6) の 6 の箇所を n にして，ランダムに変化させたい. ただし，n の範囲は 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 としたい. 答は (n-1)! になる.

コメント

Your comment.

コメントを送信

SOLUTIONS

実装仕様書作成例

▷分類

教科：大学数学	コース：微積分学

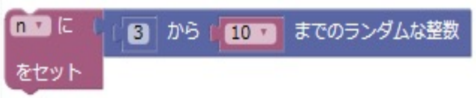
▷単元

広義積分

▷問題名

ガンマ関数の計算問題

▷問題生成処理



▷問題文

Γ(n) の値を求めよ.

▷解答欄

No	Name	Type
1	ans1	数式

▷フィードバックと採点

▷解説

▷備考

コメント

Your comment.

コメントを送信

Problems Faced (2)

3点を通る平面の方程式の問題の作成にも，正解の$ax + by + cz = d$に対応するベクトル(a, b, c)と学生が入力した平面の方程式$Ax + By + Cz = D$に対応するベクトル(A, B, C)を並べてできる 2×3行列

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ A & B & C \end{pmatrix}$$

の階数(ランク)が 1と等しいと判定する場面がでてくるので，階数の計算が必要である。

PROBLEMS FACED (2)

この例のように線形代数の種々の問題の実装仕様書を作成するとき，特殊な行列生成や行列のランクを計算するための複雑に絡みあったブロック群が頻出する問題が発生した。

もちろん、複雑なブロックを組み合わせることにより階数の計算が実現可能であるが，それらをまとめて新たなる一つのブロックと定めた方が便利である。

SOLUTIONS

そこで，我々は，必要となる数学的処理を実現するための複雑なブロックからなる群を一つにまとめたものを新たなブロックとして慎重に策定した。

No.	ブロック名	処理内容
1	サイズ指定行列	成分が一定の範囲の任意の行列を生成
2	行列の演算	行列の和・スカラー倍・積を返す
3	行・列結合	行または列に関して2つの行列を結合
4	階数指定行列	指定されたサイズと階数を持つ行列を指定された数値範囲で生成
5	行列式指定行列	指定された数値範囲の行列式を持つ指定サイズの正方行列の生成
6	被約階段行列	指定された主成分を持つ被約階段行列（行簡約行列）の生成
7	対角行列	リストの要素を対角成分に持つ対角行列を生成
8	基本行列	各基本変形に対応する基本行列を生成
9	列指定置換行列	順列で与えた置換による列置換行列を生成
10	Jordan標準形	指定されたJordanブロックを持つJordan標準形の生成
11	正規直交系	正規直交系となるベクトルのリストを生成
12	行列の階数	行列の階数を返す
13	行列式	行列式を計算する
14	被約階段行列変形	与えられた行列を行に関して基本変形し，被約階段行列（行簡約行列）に変形したものを返す
15	内積指定直交化	内積の表現行列を与えて直交化の計算を行う
16	内積指定正規化	内積の表現行列を与えて正規化の計算を行う
17	多項式の係数取り出し	多変数1次式から指定変数の係数と定数項からなるリストを取り出す
18	直交行列判定	行列が直交行列であるか判定する
19	対角行列判定	入力された行列が対角行列であるかどうか判定する
20	外積ベクトル	外積ベクトルを計算して返す
21	解空間	行列を係数行列とする斉次連立1次方程式の解空間の基底のリストを返す

21個のブロックについて，MATH ON WEBに実装されている線形代数の問題セットと照合して検証したところ，全**105セット中102セット（97.1%）**に必要なプロセスを与えていることが確認された。このことより，21個のブロックは，標準的な線形代数の演習問題をオンラインテスト化するのに十分なプロセスを与えているといえる。線形代数のみでの検証ではあるが，線形代数は「チェック項目」が最も複雑になる科目であるため，他の科目（微積分や常微分方程式など）でも同様に限定されたブロックのみによって実装仕様が記述可能であると考える。

MeLQS: https://melqs.org

Problems of STACK are in https://mathbank.jp

Thanks a lot!